第 3 节 数列综合大题专项（★★★☆）

内容提要

本节收录一些数列综合大题，包括开放性大题、数列的去项和添项问题等.

1．开放性大题：题干可能给出几个条件，让我们选 1 个或 2 个，再解答问题，这类题作答前应先评估怎样选条件，接下来的解题过程自己比较熟悉.

2．去项和添项问题：这类题的核心是分析去项、添项后的数列的构成，要解决这个问题，往往需要结合通项先估计临界位置大概在哪里，再到附近去尝试.

3．特值探路法：当由所给关系式不易正面求解问题时，可考虑通过取 $n=1,2,3$ 等来找到问题的答案，再进行分析，这种方法一般称之为“特值探路法”.

4．丢项放缩：在某些证明与前 n 项和有关的不等式问题中，若前 n 项和无法求出，则常考虑将其放缩成能求和的新数列，具体常见放缩方法见例 4 的反思.

典型例题

类型Ⅰ：开放性数列大题

【例 1】（2021・全国甲卷）已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，从下面①②③中选取两个作为条件，证明另外一个成立.

①数列 $\{a_n\}$ 是等差数列；②数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列；③ $a_2=3a_1$.

证法 1：选①②为条件.（要证的是 $a_2=3a_1$，故直接由已知条件对 n 赋值来论证）

因为 $\{a_n\}$ 是等差数列，所以 $a_1+a_3=2a_2$，故 $a_3=2a_2-a_1$ （i），

又 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列，所以 $\sqrt{S_1}+\sqrt{S_3}=2\sqrt{S_2}$，即 $\sqrt{a_1}+\sqrt{a_1+a_2+a_3}=2\sqrt{a_1+a_2}$ （ii），

（要证的是 a_2 与 a_1 的关系，故应消去 a_3）将式（i）代入式（ii）整理得：$\sqrt{a_1}+\sqrt{3a_2}=2\sqrt{a_1+a_2}$，

所以 $a_1+3a_2+2\sqrt{3a_1a_2}=4a_1+4a_2$，从而 $2\sqrt{3a_1a_2}=3a_1+a_2$，故 $12a_1a_2=9a_1^2+a_2^2+6a_1a_2$，

整理得：$(3a_1-a_2)^2=0$，所以 $3a_1-a_2=0$，从而 $a_2=3a_1$，故③成立.

证法 2：选①③为条件.（由 $a_2=3a_1$ 可建立 a_1 和公差 d 的关系，若把 d 用 a_1 表示，则 S_n 也能用 a_1 表示）

因为 $\{a_n\}$ 是等差数列，且 $a_2=3a_1$，设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $d=a_2-a_1=2a_1$，

所以 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}\cdot 2a_1=n^2a_1$，故 $\sqrt{S_n}=\sqrt{n^2a_1}=\sqrt{a_1}\cdot n$，

所以 $\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}=\sqrt{a_1}\cdot(n+1)-\sqrt{a_1}\cdot n=\sqrt{a_1}$，从而 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列，故②成立.

证法 3：选②③为条件.（由 $a_2=3a_1$ 可把 $\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}$ 用 a_1 表示，从而求出 $\sqrt{S_n}$）

因为 $a_2=3a_1$，所以 $\sqrt{S_2}=\sqrt{a_1+a_2}=\sqrt{a_1+3a_1}=2\sqrt{a_1}$，

又 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列，故其公差为 $\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}=\sqrt{a_1}$，

所以 $\sqrt{S_n}=\sqrt{S_1}+(n-1)\cdot\sqrt{a_1}=\sqrt{a_1}+(n-1)\cdot\sqrt{a_1}=n\sqrt{a_1}$，故 $S_n=n^2a_1$，

（有了 S_n，当然可求出 a_n，再证 $\{a_n\}$ 为等差数列）

当 $n\ge 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2a_1-(n-1)^2a_1=(2n-1)a_1$，又当 $n=1$ 时，$a_n=(2n-1)a_1$ 也成立，

所以 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n=(2n-1)a_1$，从而 $a_{n+1}-a_n=(2n+1)a_1-(2n-1)a_1=2a_1$，故 $\{a_n\}$ 是等差数列.

【反思】上面的证法 2、3，核心思想都是消元，根据 $a_2=3a_1$ 把其它有关的量全部用 a_1 表示，证出结论.

类型Ⅱ：数列中的特值探路

【例 2】已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，$\{b_n\}$ 为等比数列且公比 $q=2$，数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n 和 T_n，且满足 $T_{2n}+2=S_{2^n}$，求等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解：两个数列中，a_1，d，b_1 未知，可在 $T_{2n}+2=S_{2^n}$ 中分别取 $n=1$，2，3，建立三个方程求解它们，

设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，因为 $T_{2n}+2=S_{2^n}$，所以 $\begin{cases}T_2+2=S_2\\T_4+2=S_4\\T_6+2=S_8\end{cases}$，故 $\begin{cases}\dfrac{b_1(1-2^2)}{1-2}+2=2a_1+d\\\dfrac{b_1(1-2^4)}{1-2}+2=4a_1+6d\\\dfrac{b_1(1-2^6)}{1-2}+2=8a_1+28d\end{cases}$，

整理得：$\begin{cases}3b_1+2=2a_1+d & ①\\15b_1+2=4a_1+6d & ②\\63b_1+2=8a_1+28d & ③\end{cases}$，要求的是 a_n，于是由①②、①③分别消去 b_1，再解 a_1 和 d，

由①×5−②得：$6a_1-d=8$ ④，由①×21−③得：$34a_1-7d=40$ ⑤，

联立④⑤解得：$a_1=2$，$d=4$，所以 $a_n=a_1+(n-1)d=4n-2$.

【反思】若已知某一个或几个数列为等差、等比数列，但又不易直接翻译已知条件求得通项，还可考虑取特值探路. 例如本题就是通过取 $n=1,2,3$ 构造关于 a_1，b_1 和 d 的方程组，求解出了两个数列的参数.

类型Ⅲ：数列中的去项、添项问题

【例 3】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $S_n=2a_n-n(n\in\mathbf{N}^*)$.

（1）证明数列 $\{a_n+1\}$ 是等比数列，并求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=2n-1$，在数列 $\{b_n\}$ 中将 $\{a_n\}$ 中的项去掉，余下的项按原顺序构成数列 $\{x_n\}$，求 $x_1+x_2+\cdots+x_{80}$.

解：（1）（给出 S_n 与 a_n 混搭的关系式，让求 a_n，考虑退 n 相减，消去 S_n）

因为 $S_n=2a_n-n$，所以当 $n\ge 2$ 时，$S_{n-1}=2a_{n-1}-(n-1)$，从而 $S_n-S_{n-1}=2a_n-n-[2a_{n-1}-(n-1)]$，

故 $a_n=2a_n-2a_{n-1}-1$，整理得：$a_n=2a_{n-1}+1$，所以 $a_n+1=2(a_{n-1}+1)$ ①，（需再验证 $a_1+1\ne 0$）

在 $S_n=2a_n-n$ 中取 $n=1$ 可得 $S_1=a_1=2a_1-1$，所以 $a_1=1$，故 $a_1+1=2\ne 0$，

结合①可得 $\{a_n+1\}$ 是首项和公比都为 2 的等比数列，所以 $a_n+1=2\times 2^{n-1}$，故 $a_n=2^n-1$.

（2）由题意，$\{b_n\}$ 是由正奇数构成的数列，（先看 $\{b_n\}$ 的前 80 项中哪些也在 $\{a_n\}$ 中，它们就是要去掉的）

$b_{80}=2\times 80-1=159$，注意到 2^n-1 必为奇数，所以 $\{a_n\}$ 中的项全部在 $\{b_n\}$ 中，

又 $a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=7$，…，$a_7=127$ 都小于 b_{80}，$a_8=255>b_{80}$，

（说明 $\{b_n\}$ 前 80 项中应去掉 $\{a_n\}$ 的前 7 项，剩 73 项，再看 $b_{81},b_{82},\cdots,b_{87}$ 这 7 项中还会不会去项）

又 $b_{87}=2\times 87-1=173<a_8$，所以 $\{b_n\}$ 的前 87 项中恰有 7 项在 $\{a_n\}$ 中，去掉这 7 项即得 $\{x_n\}$ 的前 80 项，

所以 $x_1+x_2+\cdots+x_{80}=b_1+b_2+\cdots+b_{87}-(a_1+a_2+\cdots+a_7)$

$=\dfrac{87\times(b_1+b_{87})}{2}-(2^1-1+2^2-1+\cdots+2^7-1)=\dfrac{87\times(1+173)}{2}-[\dfrac{2\times(1-2^7)}{1-2}-7]=7322.$

【变式】已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=\dfrac{3n^2-n}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设集合 $P=\{x\,|\,x=a_n,n\in\mathbf{N}^*\}$，$Q=\{x\,|\,x=6n-3,n\in\mathbf{N}^*\}$，将集合 $P\cup Q$ 中的项按照从小到大的顺序排列，得到数列 $\{x_n\}$，求数列 $\{x_n\}$ 的前 50 项和.

解：（1）（已知 S_n 求 a_n，用 $a_n=\begin{cases}S_1,n=1\\S_n-S_{n-1},n\ge 2\end{cases}$ 计算即可）因为 $S_n=\dfrac{3n^2-n}{2}$，所以 $a_1=S_1=1$，

当 $n\ge 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{3n^2-n}{2}-\dfrac{3(n-1)^2-(n-1)}{2}=3n-2$，

又 $a_1=1$ 也满足上式，所以 $a_n=3n-2(n\in\mathbf{N}^*)$.

（2）（从条件来看，把 $\{a_n\}$ 和 $\{6n-3\}$ 的项合在一起，就构成了 $P\cup Q$，但由于 $P\cup Q$ 中不允许元素重复，所以若有公共项，则公共项只计入一次，故先分析 $\{a_n\}$ 和 $\{6n-3\}$ 有无公共项）

记 $b_n=6n-3$，则 $b_{n+1}-b_n=6(n+1)-3-(6n-3)=6$，所以 $\{b_n\}$ 是公差为 6 的等差数列，

若 $b_n=a_m$，则 $6n-3=3m-2$，所以 $m=2n-\dfrac{1}{3}$，因为 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$2n-\dfrac{1}{3}\notin\mathbf{N}^*$，

所以 $m=2n-\dfrac{1}{3}$ 不可能成立，从而 $b_n=a_m$ 不可能成立，故 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 没有公共项，

（接下来分析 $\{x_n\}$ 的前 50 项中，哪些是 $\{a_n\}$ 的，哪些是 $\{b_n\}$ 的，观察通项可知 $\{b_n\}$ 增长得比 $\{a_n\}$ 快，故由小到大排序后，$\{x_n\}$ 的前 50 项中，$\{b_n\}$ 的项肯定比 $\{a_n\}$ 少，结合 n 的系数是 2 倍的关系，不妨先考虑 $\{a_n\}$ 的第 33 项和 $\{b_n\}$ 的第 17 项，把它们附近的几项都算出来看看）

因为 $b_{16}=6\times 16-3=93$，$b_{17}=6\times 17-3=99$，$b_{18}=6\times 18-3=105$，$a_{33}=3\times 33-2=97$，

$a_{34}=3\times 34-2=100$，所以 $b_{16}<a_{33}<b_{17}$，$a_{34}>b_{17}$，

（这就说明数列 $\{x_n\}$ 第 50 项附近的顺序应为 a_{33}，b_{17}，a_{34}，$\cdots$）

从而数列 $\{x_n\}$ 的前 50 项由数列 $\{a_n\}$ 的前 33 项和数列 $\{b_n\}$ 的前 17 项构成，

故 $x_1+x_2+\cdots+x_{50}=(a_1+a_2+\cdots+a_{33})+(b_1+b_2+\cdots+b_{17})=\dfrac{33(a_1+a_{33})}{2}+\dfrac{17(b_1+b_{17})}{2}$

$=\dfrac{33\times(1+97)}{2}+\dfrac{17\times(3+99)}{2}=2484.$

【总结】从上面两道题可以看出，数列的去项、添项问题，核心在于分析去项、添项后的数列的构成，要解决这个问题，往往需要结合通项先估计临界位置大概在哪里，再到附近去尝试.

类型Ⅳ：丢项放缩大题

【例 4】已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+a_n}$.

（1）证明：数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是等差数列，并求$a_n$；

（2）若数列$\{b_n\}$满足$\sum\limits_{i=1}^{n}b_i=\sum\limits_{i=1}^{2^n-1}a_i$，证明：（i）$b_n\le 1$；（ii）$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n-1}\le n$.

解：（1）（要证$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是等差数列，即证$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}$为常数，把递推公式代进去化掉$a_{n+1}$计算即可）

因为$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+a_n}$，所以$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1+a_n}{a_n}-\dfrac{1}{a_n}=1$，又$a_1=1$，所以$\dfrac{1}{a_1}=1$，

故$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是首项和公差都为 1 的等差数列，所以$\dfrac{1}{a_n}=1+(n-1)\times 1=n$，故$a_n=\dfrac{1}{n}$.

（2）（i）（给出的式子$\sum\limits_{i=1}^{n}b_i=\sum\limits_{i=1}^{2^n-1}a_i$的左侧是$\{b_n\}$的前$n$项和，故可退$n$相减，求出$b_n$再看）

由题意，$b_1+b_2+\cdots+b_n=\sum\limits_{i=1}^{2^n-1}a_i=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n-1}$ ①，

所以$b_1=1$，且当$n\ge 2$时，$b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}-1}$ ②，

（此处务必注意，式①和式②的右侧部分相差的不是 1 项，若看不出来相减后剩哪些，可先把式①的右侧写成$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}-1}+\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{2^{n-1}+1}+\dfrac{1}{2^{n-1}+2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n-1}$，再与式②对比）

由①－②可得：$b_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{2^{n-1}+1}+\dfrac{1}{2^{n-1}+2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n-1}$，

（上式无法求和，所以要证$b_n\le 1$，应放缩为可求和式，观察结构发现将分母全部变成2^{n-1}即可求和）

所以$b_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{2^{n-1}+1}+\dfrac{1}{2^{n-1}+2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n-1}<\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{2^{n-1}}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}$ ③，

（这里一共有多少项？可从放缩前来看，从2^{n-1}到2^n-1，共有$2^n-1-2^{n-1}+1$项）

故由③可得$b_n<\dfrac{2^n-1-2^{n-1}+1}{2^{n-1}}=\dfrac{2\times 2^{n-1}-2^{n-1}}{2^{n-1}}=\dfrac{2^{n-1}}{2^{n-1}}=1$，结合$b_1=1$知$b_n\le 1$对任意的$n\in\mathbf{N}^*$都成立.

（ii）（要证这一问的结论，肯定要联系上一小问证得的$b_n\le 1$，先把它们写出来看看规律）

由（i）可得$b_1=1\le 1$，$b_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\le 1$，$b_3=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}\le 1$，…，$b_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\dfrac{1}{2^n-1}\le 1$，

（显然发现以上各式相加，即可得出结论）所以$b_1+b_2+\cdots+b_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n-1}\le n$.

【反思】我们总结几种常见的放缩方式：①直接丢项，例如$\sqrt{4n^2-1}>\sqrt{4n^2}=2n$，$\frac{1}{2^n-1}>\frac{1}{2^n}$；②糖水不等式放缩，例如$\frac{1}{2^n-1}\le\frac{1+1}{(2^n-1)+1}=\frac{1}{2^{n-1}}$；③全放缩成一样的，如本题对$b_n$的放缩.

强化训练

1.（2022•北京模拟•★★★）已知数列$\{a_n\}$为等差数列，各项均为正数的等比数列$\{b_n\}$的前n项和为S_n，且$a_1=1$，$b_1=2$，$a_2+a_8=10$，______. 现有条件：①$\lambda S_n=b_n-1(\lambda\in\mathbf{R})$；②$a_4=S_3-2S_2+S_1$；③$b_n=2\lambda a_n(\lambda\in\mathbf{R})$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）条件①②③中有一个不符合题干要求，请直接指出；（无需证明）

（3）从剩余的两个条件中选一个填到上面的横线上，求数列$\{a_n+b_n\}$的前n项和T_n.

2.（2023•绵阳二诊•★★★）已知等比数列$\{b_n\}$的各项都为正数，$b_1=\frac{2}{3}$，$b_3=\frac{8}{27}$，数列$\{a_n\}$的首项为1，前n项和为S_n，请从下面①②③中选一个作为条件，判断是否存在$m\in\mathbf{N}^*$，使得$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_nb_n\le a_mb_m$恒成立？若存在，求出m的值；若不存在，说明理由.

①$2a_n-S_n=1(n\in\mathbf{N}^*)$；②$a_2=\frac{1}{4}$且$a_{n+1}a_{n-1}=a_n^2(n\ge2)$；③$a_n-1=a_{n-1}(n\ge2)$.

3.（2023•赤峰模拟•★★★）正项数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2=3$，数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的前$n$项和为$S_n$，且______.

从下面的三个条件中选一个填在上面的横线上，并解答后面的两个问题.

①$a_{2k-1}=k(2k-1)$且$a_{2k}=k(2k+1)$，其中$k\in\mathbf{N}^*$；②$\{\sqrt{8a_n+1}\}$为等差数列；③$\{(n+1)S_n\}$为等差数列.

问题：（1）求$\{a_n\}$的通项公式；（2）求证：$S_na_n=n^2$.

4.（2023 •阜阳模拟 •★★★）已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n+1$，等比数列$\{b_n\}$满足$b_2=a_1-1$，$b_3=a_2-1$.

（1）求数列$\{b_n\}$的通项公式；

（2）记$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前 n 项和分别为S_n，T_n，求满足$T_n=S_m(4<n\le 10)$的所有数对(n,m).

5.（2023 • 盐城模拟 • ★★★）已知等差数列$\{a_n\}$和等比数列$\{b_n\}$满足$a_1=1$，$b_3=8$，$a_n=\log_2 b_n$.

（1）求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（2）设数列$\{a_n\}$中不在数列$\{b_n\}$中的项按从小到大的顺序构成数列$\{c_n\}$，记$\{c_n\}$的前 n 项和为S_n，求S_{50}.

6.（2023 • 武汉二调 • ★★★★）记数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，对任意的正整数 n，有$2S_n=na_n$，且$a_2=3$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）对所有正整数 m，若$a_k<2^m<a_{k+1}$，则在a_k和a_{k+1}两项中插入2^m，由此得到一个新的数列$\{b_n\}$，求$\{b_n\}$的前 40 项和.

7.（2023 • 新高考Ⅰ卷 • ★★★★）设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，且$d>1$，令$b_n=\dfrac{n^2+n}{a_n}$，记S_n，T_n分别为数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前 n 项和.

（1）若$3a_2=3a_1+a_3$，$S_3+T_3=21$，求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若$\{b_n\}$为等差数列，且$S_{99}-T_{99}=99$，求 d.